Задание 1. Построение таблиц истинности. Построить таблицу истинности для заданной формулы.

	Формула
1.	A&B ∨¬A&C ∨¬(A&B)&C∨B&¬C
2.	¬ (A&(A&B&¬C ∨¬A&¬B&C)
3.	(¬A∨B∨C)&A&B&¬C&(¬A∨¬B∨¬C)&(A∨B&C)
4.	(A&B∨A&¬B&C∨A&¬B&¬C∨A&¬C)&(B ∨ C)
5.	(A∨B∨C&¬(A∨B)∨B&¬A)&(A∨C ∨A&B&C)
6.	(¬A∨A&B&C∨¬C)&A&B&C&(A∨C)& (A&C∨B)
7.	¬A&B&¬C∨¬C&B∨A&C∨¬A&C
8.	(¬A∨A&B∨B&C)&(B ∨¬A&¬B&¬C∨¬A&C)
9.	¬(¬(A&C∨B)∨¬B∨B&¬(A∨C))
10.	¬A&C∨A&¬C ∨B&C ∨A&¬(B&C)∨C
11.	(A&B∨C∨A&¬C)&(A∨C ∨B&¬(A∨C))
12.	(A∨ ¬A&B)&(A∨ C∨ ¬A&B∨ A&B&¬C)
13.	¬(¬(¬A∨¬B∨C)∨¬(A∨C)∨A&¬B)
14.	¬(¬(¬A&B)∨¬(B&C)∨A&C)
15.	A&¬B∨¬ (¬A∨C)∨ (¬B∨C→C)
16.	(A&B∨A&¬B&C∨A&¬B&¬C∨A&¬C)&B&C
17.	(A&C∨A&¬B&¬C∨A&B&¬C)&(C ∨A&B&C)
18.	(¬A∨A&B∨¬B&C)&(B∨¬B&C∨B&C&(A∨ ¬B))
19.	¬(¬A∨¬B&(A∨C)∨B&¬(A∨C))
20.	¬(¬(B∨C)∨¬(A∨C)∨A&B)

Примеры решения задачи.

Пример 1. Дана формула: $F = A \to B \lor C$

Формула содержит три атома A, B, C. Для такой формулы существует 8 интерпретаций. Представим их в таблице.

A	B	C	$B \lor C$	$A \to B \lor C$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Последний столбец – результат. Заметим, что первоначально выполняется $B \lor C$, так как операция ИЛИ имеет **высший** приоритет по отношению к операции ИМПЛИКАЦИЯ (правая и левая части для импликации выделены цветом).

Пример 2. $F = ((B \& C \lor A) \to \neg B) \lor \neg A \& B \& \neg C$

Для наглядности обозначим части формулы:
$F1 = ((B \& C \lor A) \to \neg B)$ $F2 = \neg A \& B \& \neg C$ $F = F1 \lor F2$

A	B	C	$B \& C$	$B \& C \lor A$	$\neg B$	F1	F2	F
0	0	0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0

Примечание. В математической логике, в отличие от схемотехники, принято использовать обозначения И (истина) и Л (ложь) для значений атомарных высказываний. При работе с высказываниями, представленными в виде формул, допустимо использовать обозначения 1 (истина) и 0 (ложь) для наглядности.

Задание 3. Представить в ДНФ и в КНФ следующие формулы:

№	
1	$((A\to B\vee C)\to\neg A\vee C)\to(A\&\neg C\vee B\to\neg A\&\neg B)$
2	$(B\to(A\vee C\to\neg C))\to A\&(\neg B\to A\&C)$
3	$(\neg A\to(\neg C\to B))\to(A\vee B\to B\&C)$
4	$(B\vee C)\to((\neg B\to\neg A\vee C)\to B\&C\&\neg A)$
5	$((\neg C\&\neg B\to A)\to C)\to(A\vee\neg C)\&B$
6	$((A\to B\&C)\to C)\to(A\vee C\to B)$
7	$(A\&B\to(A\vee\neg C\to\neg B))\to(A\to B\vee\neg C)$
8	$((\neg C\to B)\to A)\to B\&(A\to\neg C)$
9	$\neg(\neg A\vee A\&B\&\neg C)\vee\neg(\neg B\vee C)\&(\neg A\vee B)$
10	$\neg(B\vee\neg A\&\neg C)\vee\neg(A\vee\neg C)$
11	$(A\to(A\vee C\to\neg B))\to(A\vee C\to B\&C)$
12	$(B\vee C\to\neg A)\to((C\to B)\to A\&C)$
13	$(C\to(\neg A\vee B\vee C))\to(A\&B\&C)$
14	$(A\&C\to(B\vee C\to\neg A))\to(B\vee C\to\neg A)$
15	$((B\to C)\to A)\to((\neg C\vee B\to\neg A)\to C)$
16	$(A\to(\neg B\to C))\to((B\to A\vee C)\to A)$
17	$((A\&B\to C)\to(A\vee C\to A\&\neg B))\to A\&C$
18	$(A\&B\to(A\vee\neg C\to\neg B))\to(A\vee C\to B\vee\neg C)$
19	$\neg(\neg(A\&C\vee\neg B\&\neg C)\vee\neg A\&B)\vee\neg(\neg A\vee\neg B)$
20	$\neg(\neg(B\vee C)\vee\neg A)\vee\neg(\neg C\vee B)\vee A\&\neg B\&C$

Пример решения задачи

Формула логики высказываний F представлена в *конъюнктивной нормальной форме* (КНФ) тогда и только тогда, когда она имеет форму

$F = B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_m$, где каждая из B_i ($i = \overline{1, m}$) есть дизъюнкция литер.

Аналогично говорят, что формула логики высказываний F представлена в *дизъюнктивной нормальной форме* (ДНФ) тогда и только тогда, когда она имеет форму $F = A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$, где каждая из A_i ($i = \overline{1, n}$) есть конъюнкция литер.

Алгоритм преобразования произвольной формулы исчисления высказываний в нормальную форму состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Избавляемся от связок эквивалентность и импликация, применяя формулы

$$A \leftrightarrow B = (A \to B) \& (B \to A).$$

$$A \to B = \neg A \vee B.$$

Шаг 2. Продвигаем знаки отрицания до атомов, используя правила Де-Моргана, также снимаем двойные отрицания.

$\neg\neg A = A$.

$$\left.\begin{aligned} \neg(A \vee B) &= \neg A \,\&\, \neg B \\ \neg(A \,\&\, B) &= \neg A \vee \neg B \end{aligned}\right\}$$ законы Де-Моргана.

Шаг 3. Для получения КНФ применяем правило внесения в скобки

$A \vee (B \,\&\, C) = (A \vee B) \,\&\, (A \vee C)$.

Для получения ДНФ многократно применяем правило раскрытия скобок

$A \,\&\, (B \vee C) = A \,\&\, B \vee A \,\&\, C$.

Получим ДНФ для формулы $(A \to (B \vee \neg C)) \to D$.

В преобразованиях используем формулы Де-Моргана и тождество

$X\to Y = \neg X \vee Y$

$(A \to (B \vee \neg C)) \to D = (\neg A \vee B \vee \neg C) \to D = \neg(\neg A \vee B \vee \neg C) \vee D = A\&\neg B \,\&\, C \vee D$

Получим КНФ для формулы $(A \to (B \vee \neg C)) \to D$.

$(A \to (B \vee \neg C)) \to D = (\neg A \vee B \vee \neg C) \to D = \neg(\neg A \vee B \vee \neg C) \vee D =$
$(A \,\&\, \neg B \,\&\, C) \vee D = (A \vee D) \,\&\, (\neg B \vee D) \,\&\, (C \vee D)$.

На последнем шаге используем тождество $X \vee Y\&Z = (X \vee Y)\&(X \vee Z)$

Задание 4

Формализовать представленные рассуждения в виде формул алгебры логики.

1. Если у больного болит зуб, то рекомендуется принять анальгин; если болит голова, то также рекомендуется принять анальгин. В данном случае у больного болит зуб или голова. Следовательно, ему рекомендуется принять анальгин.
2. Если я поеду автобусом, а автобус опоздает, то я пропущу назначенное свидание. Если я пропущу назначенное свидание и начну огорчаться, то мне не следует ехать домой. Если я не получу эту работу, то я начну огорчаться и мне следует поехать домой. Следовательно, если я поеду автобусом и автобус опоздает, то я получу эту работу.
3. Или этот предмет не сложен, или экзаменатор снисходителен. Если этот предмет интересен, то он сложен. Экзаменатор не снисходителен. Значит, этот предмет неинтересен.
4. Либо Петя поехал отдыхать на юг, либо, если Петя не сдал вовремя сессию, то ему пришлось каникулы провести дома. Если Петя поехал отдыхать на юг, то он сдал сессию вовремя. Следовательно, если Петя не сдал сессию вовремя, то ему пришлось каникулы провести дома.
5. Если вечер скучен, то или Катя начинает плакать, или Толя рассказывает смешные истории. Если Сережа приходит на вечер, то или вечер скучен, или Катя перестает плакать. Или вечер скучен, или Сережа приходит на вечер. Сережа приходит на вечер тогда и только тогда, когда Толя рассказывает смешные истории. Следовательно, если Катя перестает плакать, то Толя рассказывает смешные истории.
6. Если N серьезный политик, он не будет делать никаких заявлений. А если у него есть программа, то он должен её изложить. N сделал такое заявление и не изложил свою программу. Значит, он не серьезный политик, и у него нет программы.
7. Если 6 – составное число, то 12 – составное число. Или 12 – не составное число, или существует простое число большее, чем 12. Если существует простое число больше 12, то существует составное число больше 12. Если 6 делится на 2, то 6 – составное число. Не существует составного числа, большего, чем 12. Следовательно, 6 не делится на 2.
8. Профсоюзы штата будут продолжать поддерживать губернатора, если он подпишет данный билль. А фермеры окажут ему поддержку, если он наложит на него вето. Губернатор либо подпишет данный билль, либо наложит на него вето. Значит, губернатора поддержат либо профсоюзы, либо фермеры.
9. Если Смит был убийцей, то Джонс лжет. Если Джонс лжет, то убийство имело место после полуночи. Джонс не встречал этой ночью Смита тогда и только тогда, когда Смит был убийцей. Если

Джонс встречал этой ночью Смита, то убийство имело место после полуночи. Следовательно, убийство имело место после полуночи.

10. Если Ваня победит на соревнованиях, он будет доволен, а если он будет доволен, то он не обладает бойцовскими качествами. Но если он не победит на соревнованиях, то он потеряет доверие товарищей. Ваня не обладает бойцовскими качествами, если он потеряет доверие товарищей. Если он не обладает бойцовскими качествами, ему следует уйти из команды. Ваня или победит на соревнованиях или не победит. Следовательно, ему нужно уйти из команды.
11. Если днем я не буду хандрить или сделаю все свои дела, то меня ожидает приятный вечер и встреча с любимой девушкой. Если меня ожидает встреча с любимой девушкой или я буду счастлив, то завтра я готов совершить нечто великое. Следовательно, если днем я не буду хандрить, то завтра я готов совершить нечто великое.
12. Если экзаменатор строг, то экзамен трудно сдать. Экзаменатор строг или студенты плохо посещают занятия. Если студенты плохо посещают занятия, то плохо работает администрация факультета. Однако администрация работает хорошо. Значит, экзамен трудно сдать.
13. Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал его этой ночью и убийство имело место после полуночи. Если убийство имело место после полуночи, то либо Смит был убийцей, либо Джонс не лжет. Следовательно, Смит был убийцей.
14. Либо свидетель не был запуган, либо, если Генри покончил жизнь самоубийством, то записка была найдена. Если свидетель не был запуган, то Генри не покончил жизнь самоубийством. Следовательно, если Генри покончил жизнь самоубийством, то записка была найдена.
15. Если преступление совершено вследствие стечения тяжелых личных или семейных обстоятельств, то эти обстоятельства признаются смягчающими ответственность виновного. Если преступление совершено под влиянием сильного душевного волнения, вызванного неправомерным действием потерпевшего, то это обстоятельство также признается смягчающим ответственность. Преступление совершено вследствие тяжелых личных или семейных обстоятельств или под влиянием сильного душевного волнения, вызванного неправомерными действиями потерпевшего. Следовательно, эти обстоятельства будут признаны смягчающими ответственность.

16. Или Валя и Борис одного возраста, или Валя старше Бориса. Если Валя и Борис одного возраста, то Наташа и Борис не одного возраста. Если Валя старше Бориса, то Борис старше Сергея. Следовательно, или Наташа и Борис не одного возраста, или Борис старше Сергея.

17. Комиссия примет дом тогда и только тогда, когда он будет закончен в феврале. Если дом будет закончен в феврале, то в марте мы сможем переехать. Если мы сможем переехать в марте, то должны внести за март квартирную плату. Если комиссия дом не примет, то мы все равно должны внести за март квартирную плату. Следовательно, мы будем вносить за март квартирную плату.
18. Если 2 – простое число, то это наименьшее простое число. Если 2 – наименьшее простое число, то 1 есть простое число. Число 1 не есть простое число. Следовательно, 2 не есть простое число.
19. Если завтра будет холодно, то я надену теплое пальто, если рукав будет починен. Завтра будет холодно, а я не надену теплое пальто. Следовательно, рукав не будет починен.
20. Если свидетель не был запуган, то записка была найдена, если Генри покончил жизнь самоубийством. Свидетель не был запуган и записка не была найдена. Следовательно, Генри не покончил жизнь самоубийством.

Пример решения задания 4.

Условия задачи

Если я пойду завтра на первое занятие, то должен буду встать рано, а если я пойду вечером на танцы, то лягу спать поздно. Если я лягу спать поздно, а встану рано, то я буду вынужден довольствоваться пятью часами сна. Я просто не в состоянии обойтись пятью часами сна. Следовательно, я должен не ходить завтра на первое занятие, или не ходить на танцы.

Введем буквенные обозначения для атомарных высказываний:

A: я пойду завтра на первое занятие

B: я должен буду встать рано

C: я пойду вечером на танцы

D: я лягу спать поздно

E: я буду вынужден довольствоваться пятью часами сна

Обозначим красным цветом логические связки между атомами.

Если я пойду завтра на первое занятие, то должен буду встать рано, а если я пойду вечером на танцы, то лягу спать поздно. Если я лягу спать поздно, а встану рано, то я буду вынужден довольствоваться пятью часами сна. Я просто не в состоянии обойтись пятью часами сна. Следовательно, я должен не ходить завтра на первое занятие, или не ходить на танцы.

Подставляем обозначения для атомов:

Если A, то B, и если C, то D.

Если D, и B, то E.

Я не в состоянии E. (утверждение E отрицается)

Следовательно, не A, или не C.

Окончательно:

Формализация рассуждения.

$(A \to B) \& (C \to D),\ D \& B \to E,\ \neg E \vdash \neg A \vee \neg C$

Задание 5

Для формализованного в задаче 4 рассуждения доказать логическое следствие заключения из посылок.

Пример решения задания 5.

В формализованном выше рассуждении из четырёх посылок следует заключение $\neg A \vee \neg C$.

$(A \to B) \& (C \to D)$

$D \& B \to E$

$\underline{\neg E \qquad\qquad}$

$\neg A \vee \neg C$

Доказательство логического следования.

Построим формулу по Теореме 1 о логическом следовании:

$((A \to B) \& (C \to D) \& (D \& B \to E) \& \neg E) \to (\neg A \vee \neg C)$

Наша цель – доказать общезначимость этой формулы.

Выполним следующие преобразования. Избавляемся от импликаций:

$\neg((A \to B) \& (C \to D) \& (D \& B \to E) \& \neg E) \vee (\neg A \vee \neg C)$

$\neg((\neg A \vee B) \& (\neg C \vee D) \& (\neg (D \& B) \vee E) \& \neg E) \vee (\neg A \vee \neg C)$

Применяем правила Де-Моргана:

$\neg((\neg A \vee B) \& (\neg C \vee D) \& (\neg D \vee \neg B \vee E) \& \neg E) \vee \neg A \vee \neg C =$

$\neg(\neg A \vee B) \vee \neg (\neg C \vee D) \vee \neg (\neg D \vee \neg B \vee E) \vee \neg \neg E) \vee \neg A \vee \neg C =$

$(A \& \neg B) \vee (C \& \neg D) \vee (D \& B \& \neg E) \vee E \vee \neg A \vee \neg C$

Перегруппируем для наглядности логические слагаемые и применим известное тождество (например, $(A \& \neg B) \vee \neg A$ заменяем на $\neg A \vee \neg B$) :

$(A \& \neg B) \vee \neg A \vee (C \& \neg D) \vee \neg C \vee (D \& B \& \neg E) \vee E =$

$= \neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee \neg D \vee D \& B \vee E$

Применяем тождество повторно к подчеркнутым частям формулы:

$\neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee \underline{\neg D} \vee \underline{D \& B} \vee E = \neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee \neg D \vee B \vee E =$

$= \neg A \vee \underline{\neg B} \vee \underline{B} \vee \neg C \vee \neg D \vee E = \neg A \vee И \vee \neg C \vee \neg D \vee E = И$

Доказательство логического следования от противного.

Построим формулу по Теореме 2 о логическом следовании:

$$(A \to B)\&(C \to D)\&(D\&B \to E)\& \neg E\&\neg(\neg A \vee \neg C)$$

Докажем ее противоречивость.

$$(A \to B)\&(C \to D)\&(D\&B \to E)\& \neg E\&\neg(\neg A \vee \neg C) = (\neg A \vee B)\&(\neg C \vee D)\&(\neg D \vee \neg B \vee E)\& \neg E\& A \&C=$$

$$= (\underline{\neg A \& A} \vee B\& A)\&(\underline{\neg C\&C} \vee D\&C)\&(\neg D\& \neg E \vee \neg B \& \neg E \vee \underline{E\& \neg E}) =$$

$$=(B\& A)\&(D\&C) \& (\neg D\& \neg E \vee \neg B \& \neg E)= A\& B\& C\& \underline{D\& \neg D}\& \neg E \vee A\& \underline{B}\& C\& D\&\underline{\neg B} \& \neg E =\text{Л} \vee \text{Л} =\text{Л}$$

Произведение подчеркнутых сомножителей, например, $\underline{\neg A \& A}$ даёт значение Л, далее (Л $\vee$ B& A) заменяем просто на B& A

Задание 9

III. Доказать справедливость рассуждения (взять свой вариант из задания 4) методом резолюции

Пример решения задания методом резолюции.

Условия задачи (вспомним).

Если я пойду завтра на первое занятие, то должен буду встать рано, а если я пойду вечером на танцы, то лягу спать поздно. Если я лягу спать поздно, а встану рано, то я буду вынужден довольствоваться пятью часами сна. Я просто не в состоянии обойтись пятью часами сна. Следовательно, я должен или пропустить завтра первое занятие, или не ходить на танцы.

Буквенные обозначения для атомарных высказываний:

A: я пойду завтра на первое занятие

B: я должен буду встать рано

C: я пойду вечером на танцы

D: я лягу спать поздно

E: я буду вынужден довольствоваться пятью часами сна

Формализация рассуждения.

$A \to B,\ C \to D,\ D \& B \to E,\ \neg E \vdash \neg A \vee \neg C$

В формализованном рассуждении из четырёх посылок следует заключение $\neg A \vee \neg C$.

$A \to B$

$C \to D$

$D \& B \to E$

$\underline{\neg E \qquad\qquad}$

$\neg A \vee \neg C$

Решение.

Доказываем логическое следствие заключения $\neg A \vee \neg C$ из посылок $A \to B$, $C \to D$, $D \& B \to E$, $\neg E$.

Доказательство методом резолюции выполняется только «от противного»: к произведению всех посылок добавляем *отрицание* заключения: $(A \to B) \& (C \to D) \& (D \& B \to E) \& \neg E \& \neg(\neg A \vee \neg C)$.

Приводим к КНФ: $(\neg A \vee B) \& (\neg C \vee D) \& (\neg D \vee \neg B \vee E) \& \neg E \& A \& C$.

Строим S – множество дизъюнктов, входящих в КНФ:

S = { D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6}, где

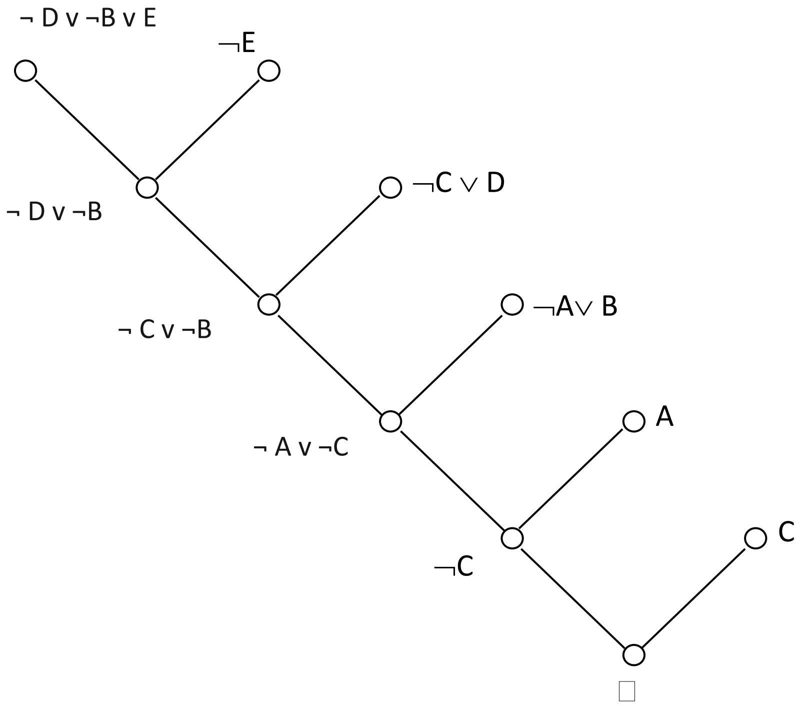
$D_1 = \neg A \vee B$
$D_2 = \neg C \vee D$
$D_3 = \neg D \vee \neg B \vee E$
$D_4 = \neg E$
$D_5 = A$
$D_6 = C$
Для доказательства противоречивости S нужно убедиться в том, что множество дизъюнктов S содержит пустой (ложный) дизъюнкт □.

Поскольку S первоначально такого дизъюнкта не содержит, надо вывести его, используя правило порождения новых дизъюнктов из исходных. Новые дизъюнкты получаем методом резолюции и добавляем их к множеству S.

D_1 : $\neg A \vee B$
D_2 : $\neg C \vee D$
D_3 : $\neg D \vee \neg B \vee E$
D_4 : $\neg E$
D_5 : A
D_6 : C

D7 : $\neg D \vee \neg B$ (резольвента D_3, D_4)
D8 : $\neg C \vee \neg B$ (резольвента D_2, D_7)
D9 : $\neg A \vee \neg C$ (резольвента D_1, D_8)
D10 : $\neg C$ (резольвента D_{10}, D_5)
D11 : □ (резольвента D_{11}, D_6)

Итак, мы вывели пустой дизъюнкт и доказали противоречивость множества S. Для наглядности процесс вывода пустого дизъюнкта представлен в виде дерева. Каждому узлу дерева приписан дизъюнкт из S или резольвента предыдущих дизъюнктов.


¬ D v ¬B v E
¬E
¬C ∨ D
¬ D v ¬B
¬A∨ B
¬ C v ¬B
A
¬ A v ¬C
C
¬C